www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École des Hautes Études Commerciales
CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

Mathématiques III

OPTION ÉCONOMIQUE

Mercredi 9 mai 1990, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long × 15 cm de large, à raison d'une seule calculatrice par candidat.

EXERCICE 1

Soit $M_3(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3. On considère les éléments suivants de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $M_3(\mathbb{R})$ définie par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence :

$$X_{n+1} = \frac{1}{n+1} X_n^2 + 2I - A \qquad n \in \mathbb{N}$$

On se propose d'exprimer X_n en fonction de A, I et n.

1. En considérant les trois éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

montrer que la matrice A est semblable à la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calculer $(B - I)^2$. En déduire que : $A^2 = 2A - I$

3. a) Soient α, β, α' et β' des nombres réels tels que : $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$

Montrer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, il existe un couple (α_n, β_n) de nombres réels et un seul tel que :

$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A$$

c) Exprimer α_n et β_n en fonction de n.

4. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, la matrice X_n est inversible et que son inverse est de la forme $\gamma_n I + \delta_n A$, où γ_n et δ_n sont des nombres réels que l'on déterminera.

EXERCICE 2

Soit f une fonction numérique de classe C^2 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$.

1. Soit x un élément de $[0, 1]$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer les intégrales :

$$\int_0^x t\, f''(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad \int_x^1 (1-t)\, f''(t)\, dt$$

en fonction de x, $f(x)$ et $f'(x)$.

.../...

b) En déduire que : (1) $$-f(x) = (1-x)\int_0^x t\,f''(t)\,dt + x\int_x^1 (1-t)\,f''(t)\,dt$$

c) Soit M un nombre réel. Calculer f lorsque $f'' = M$.

2. On suppose que, pour tout élément t de $[0, 1]$, $f''(t) \geq 0$.

a) Déduire de la relation (1) que, pour tout élément x de $[0, 1]$, $f(x) \leq 0$.

b) Montrer que s'il existe un élément a de $]0, 1[$ tel que $f(a) = 0$, alors la fonction f est nulle sur $[0, 1]$.

(On rappelle que si φ est une fonction continue positive sur $[b, c]$, la relation $\int_b^c \varphi(t)\,dt = 0$ implique $\varphi = 0$.)

3. Soit A un nombre réel. On suppose que, pour tout élément t de $[0, 1]$, $f''(t) \leq A$.

a) Montrer que, pour tout élément x de $[0, 1]$:

(2) $$f(x) \geq -\frac{Ax(1-x)}{2}$$

b) Montrer que s'il existe un point a de $]0, 1[$ tel qu'il y ait égalité dans (2), alors il y a égalité dans (2) pour tout élément x de $[0, 1]$.

(On pourra introduire la fonction g définie par $g(t) = -f(t) - \frac{At(1-t)}{2}$.)

EXERCICE 3

Une station de comptage de voitures dénombre les véhicules qui circulent sur une route. Pour tout nombre entier naturel n, on note X_n le nombre de véhicules passés entre les instants 0 et n. On pose $X_0 = 0$ et on considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On étudie un modèle dans lequel ces variables satisfont aux hypothèses suivantes.

Il existe un nombre réel strictement positif λ tel que, pour tout couple (m, n) de nombres entiers, avec $0 \leq m \leq n$:

a) la variable aléatoire $X_n - X_m$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(n-m)$;

b) les variables aléatoires X_m et $X_n - X_m$ sont indépendantes.

Soit (m, n) un couple de nombres entiers tel que $0 \leq m \leq n$.

1. Calculer l'espérance du produit $X_m(X_n - X_m)$. En déduire la covariance des variables aléatoires X_m et X_n.

2. Déterminer la loi du couple (X_m, X_n) de variables aléatoires.

3. On se place dans le cas où n est non nul. On pose $p = \frac{m}{n}$. Pour tout nombre entier naturel k, exprimer en fonction de p la loi de probabilité conditionnelle de X_m sachant que l'événement $\{X_n = k\}$ est réalisé. De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

4. On note N la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus petit des entiers naturels non nuls k tels qu'il soit passé au moins un véhicule entre les instants 0 et k.

a) Pour tout nombre entier naturel non nul k, exprimer l'événement $\{N = k\}$ à l'aide des variables aléatoires X_{k-1} et X_k.

b) En déduire la loi de probabilité de N, son espérance et sa variance.

5. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $Y_n = (-1)^{X_n}$.

a) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_n. Trouver leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

b) Calculer la covariance de Y_m et de Y_n.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail